

## Problem 9. TON BOCE

Autor: Grgur Premec

Mentor: Ivan Tomašević

1.c, XV. gimnazija, Zagreb, Hrvatska

### 1 Uvod

„Uzmite praznu bocu i pušite zrak preko njezina otvora kako biste proizveli zvuk. Zatim napunite bocu s nešto vode i promatrajte kako se zvuk mijenja.“

U ovom radu ću objasniti pojavu tona kod puhanja zraka preko otvora boce, i istražiti kako frekvencija tog tona ovisi o količini vode, odnosno zraka u boci. Rezultate ću analizirati i usporediti s teoretskim očekivanjima.

### 2 Teorijska razrada problema

#### 2.1 Zašto nastaje ton?

Zašto ton uopće nastaje kada pušemo preko otvora boce? Boca zapravo djeluje kao Helmholtzov oscilator, koji se sastoji od spremnika s plinom, u ovom slučaju zrakom, koji na sebi ima otvor, obično izdužen, poput cijevi (Slika 1).

Kada počnemo puhati u bocu, mlaz zraka iz naših usta blago stlači zrak u boci. Budući da taj zrak ima veći tlak od atmosferskog, on sada gura zrak kroz otvor (u ovom slučaju grlić boce) prema van, ali nakon što se pritisak ponovno vrati u ravnotežni položaj, zbog inercije zrak u grliću boce se nastavlja gibati. Kako taj zrak sada izlazi van iz boce, u njoj se pritisak smanjuje, i sada atmosferski pritisak gura zrak prema dolje. Zbog toga će taj zrak ubrzo usporiti i početi se vraćati nazad u bocu, i takav ciklus se ponavlja. Zbog trenja zraka uz stjenke i ostalih gubitaka te oscilacije bi ubrzo stale, ali zrak koji puše preko otvora daje potrebnu energiju da bi se oscilacije nastavile.

#### 2.2 Kvantitativni opis

Prvo moramo pretpostaviti da je valna duljina zvuka znatno veća od duljine spremnika, kako bi mogli zanemariti razlike u pritisku unutar spremnika. Ako grlić ima duljinu  $l$  i poprečni presjek  $A$ , masa zraka u njemu je  $m = \rho Al$ . Ova formula nije sasvim točna jer se tijekom titranja miče i dio zraka s obje strane grlića. Da bi prilagodili formulu, umjesto duljine  $l$  možemo koristiti ekvivalentnu duljinu  $l_{eq} = l + 0.3D$ , gdje je  $D$  diametar grlića. Kada se zrak u grliću pomakne prema unutrašnjosti boce, pritisak u boci se povećava. Budući da se ta promjena odvija vrlo brzo, nema puno vremena za razmjenu topline između zraka u boci i okoline, pa taj proces možemo aproksimirati kao adijabatski proces. To znači da kod malih promjena volumena za pritisak u boci vrijedi izraz  $\frac{\Delta p}{p_0} = -\gamma \frac{\Delta V}{V_0}$ , gdje je  $\gamma$  adijabatski koeficijent,  $p_0$  početni tlak, u ovom slučaju

atmosferski, a  $V_0$  početni volumen, odnosno volumen boce. Ako se zrak pomakne za neku malu udaljenost  $x$ , pritisak se promjeni za  $\Delta p = -\gamma p_0 \frac{Ax}{V_0}$ . Budući da je  $F = \Delta p A = ma$ , ako uvrstimo dobivamo  $a = -\frac{\gamma p_0 A}{V_0 \rho l_{eq}} x$ . Vidimo da je akceleracija zraka u grliću proporcionalna pomaku zraka od ravnotežnog položaja, što znači da se radi o jednostavnom harmonijskom gibanju, kod kojeg je kutna frekvencija jednaka korijenu koeficijenta proporcionalnosti, dakle  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma p_0 A}{V_0 \rho l_{eq}}}$ . U ovu formulu možemo uvrstiti i brzinu zvuka u plinu  $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}}$ , pa dobivamo  $f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V_0 l_{eq}}}$ , a to je formula koju ću koristiti za teorijski izračun frekvencije kako bih ju mogao usporediti s eksperimentalnim rezultatima.

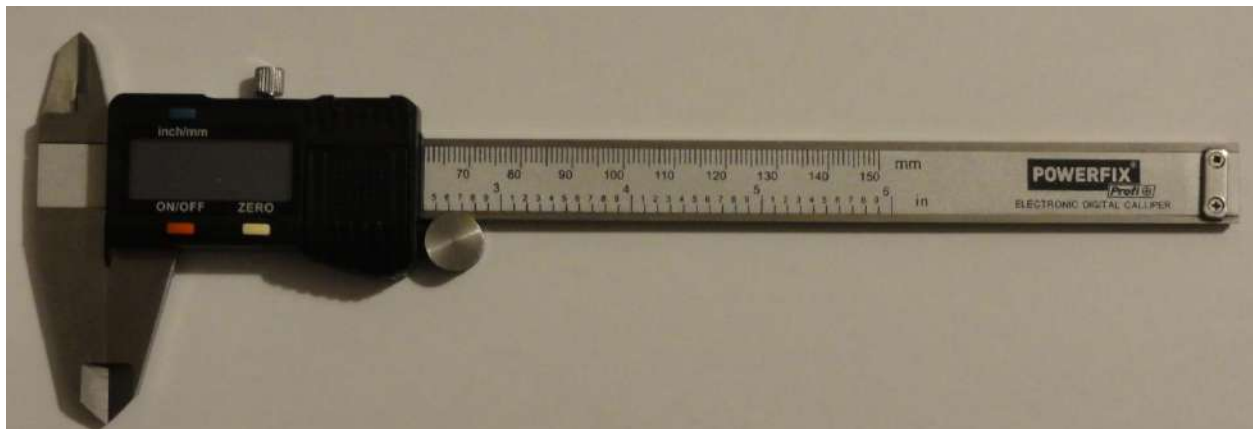
### 2.3 Parametri i hipoteze

Iz formula vidimo da frekvencija zvuka koji proizvodi boca ovisi o brzini zvuka u zraku, površini poprečnog presjeka grlića boce, njegovoj duljini i volumenu boce. Od ovih parametara brzinu zvuka ne možemo mijenjati, a površinu poprečnog presjeka i duljinu grlića je teško izmjeriti i treba nam mnogo različitih boca ako želimo imati dovoljno mjerenja da bi iz njih izvukli dobre zaključke. Zbog toga i zbog teksta zadatka jedini parametar koji ću mijenjati je volumen. To ću raditi tako što ću u bocu dodavati vodu koja, budući da je nestlačiva, ne sudjeluje u oscilacijama i tako efektivno smanjivati volumen boce.

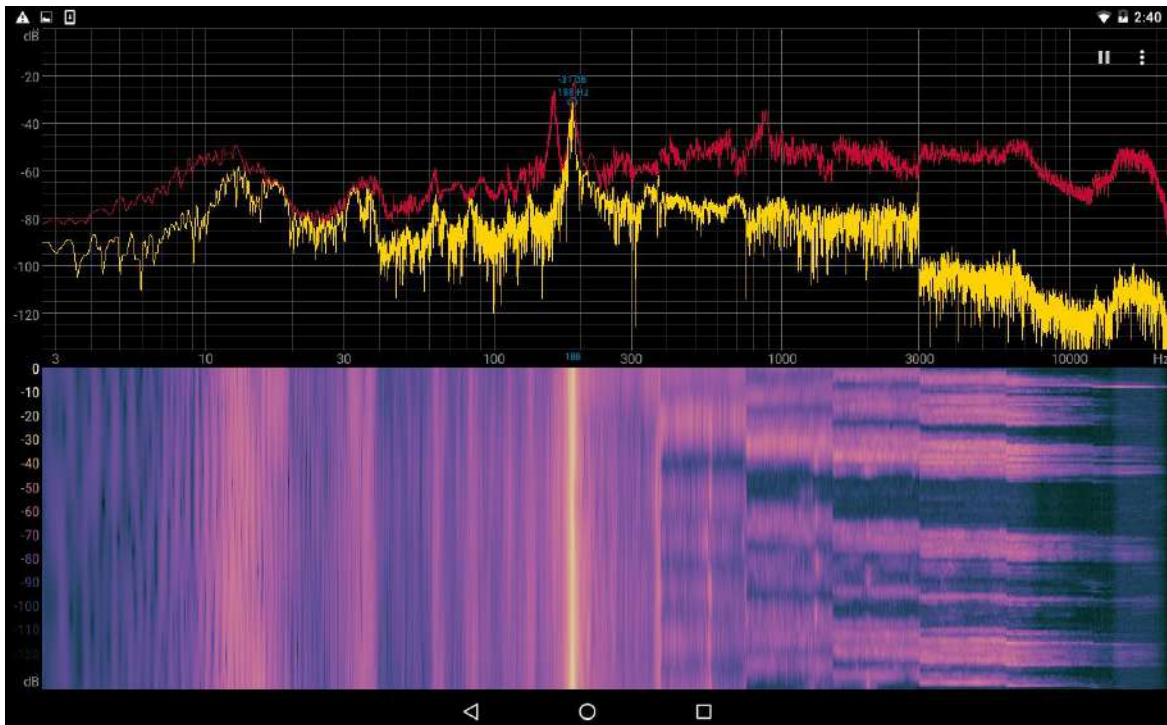
Moja hipoteza je da će se frekvencija povećavati dodavanjem vode u bocu, zbog toga što to smanjuje volumen zraka u boci te da će frekvencija titranja biti obrnuto proporcionalna korijenu volumena zraka u boci.

## 3 Eksperimentalni postav

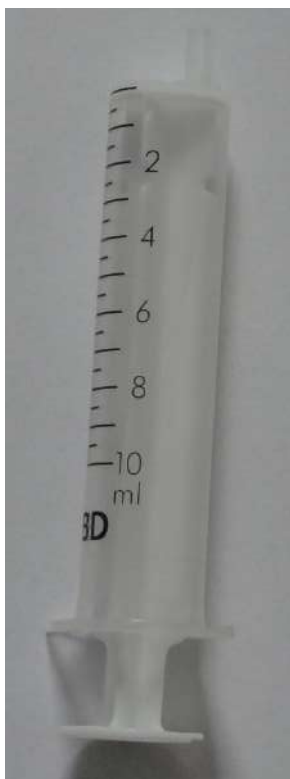
Za provođenje eksperimenta koristio sam staklenu bocu volumena 0,5 L. Za dodavanje vode u bocu koristio sam špricu volumena 10 mL, a vodu sam uzimao iz čaše. Za mjerenje frekvencije koristio sam tablet s ugrađenim mikrofonom i aplikaciju Spectroid. Za mjerenje promjera grlića boce koristio sam digitalno pomično mjerilo, a za mjerenje njegove duljine plastični trokut sa podjelom na milimetre.



Slika 1: Pomično mjerilo



Slika 2: Spectroid



Slika 3: Šprica



Slika 4: Boca

#### 4 Metode i mjerenje

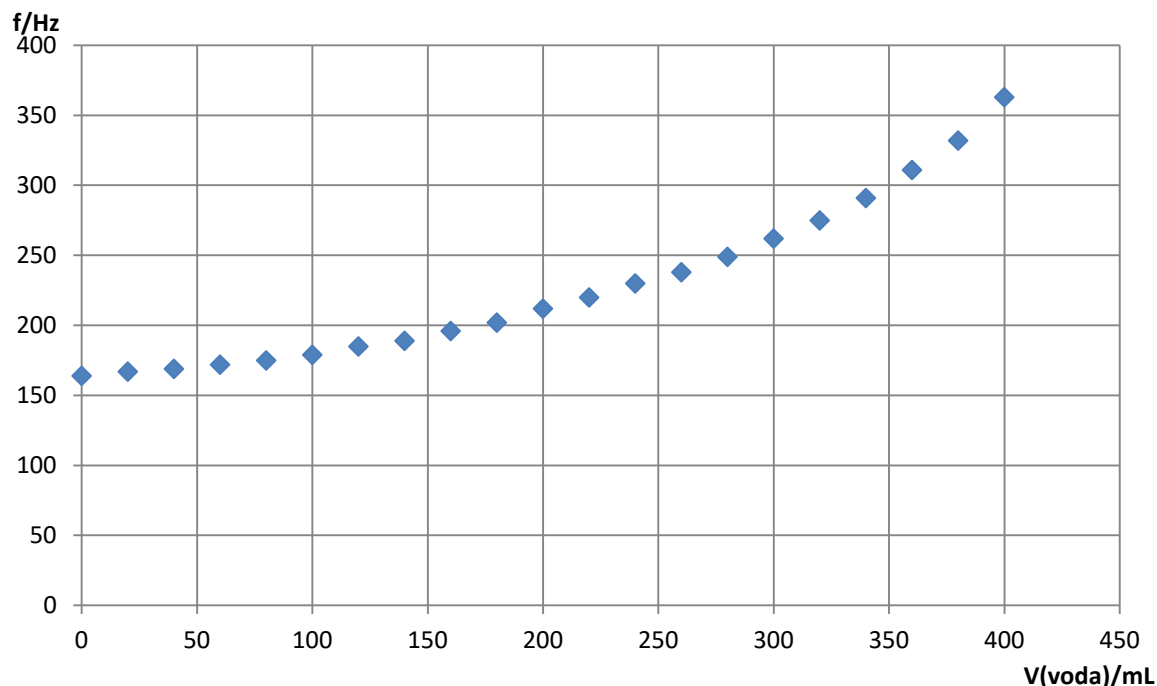
U ovom eksperimentu mjerio sam frekvenciju zvuka koji proizvodi boca, mijenjajući količinu vode u boci. Vodu sam u bocu dodavao špricom u koracima od 20 mL. Pazio sam da u šprici ne

bude mjehurića i da mi oči budu u ravnini sa špricom dok očitavam volumen kako bi dodani volumen bio što točniji. Za svaku količinu vode puhao sam preko otvora boce umjerenom snagom kako bih proizveo čisti ton. Tablet sam uvijek držao na istoj udaljenosti od boce, a na ekranu sam očitavao frekvenciju najglasnijeg (najvišeg) vrha na FFT dijagramu koju aplikacija sama ispiše. Glasnoću zvuka nisam mjerio, zato što jako ovisi o malim promjenama u jačini puhanja preko otvora pa ju je jako teško izmjeriti. Frekvencije sam zatim zapisivao u tablicu u MS Excelu da bi ih kasnije mogao obraditi. Kad sam u bocu dodao 420 mL vode, više nisam mogao proizvesti čisti ton, vjerojatno zato što je bilo premalo zraka koji nije u grliću boce, pa zrak u grliću nije mogao oscilirati. Zbog toga sam mjerio frekvencije s volumenom vode od 0 do 400 mL.

Za potrebe teorijskog izračuna frekvencije izmjerio sam i duljinu te promjer grlića boce. Duljinu sam izmjerio ravnalom, od vrha boce pa do točke gdje se boca naglo širi, iako je nemoguće odrediti gdje točno završava grlić, a počinje boca, što pridonosi odstupanjima mjerenja. promjer sam izmjerio pomičnim mjerilom tako što sam izmjerio debljinu stjenke boce i vanjski promjer, te sam zatim iz tih podataka izračunao unutarnji promjer. Grlić nema isti promjer cijelom dužinom, nego je blago stožastog oblika, pa sam izmjerio promjer na sredini grlića.

## 5 Rezultati i rasprava

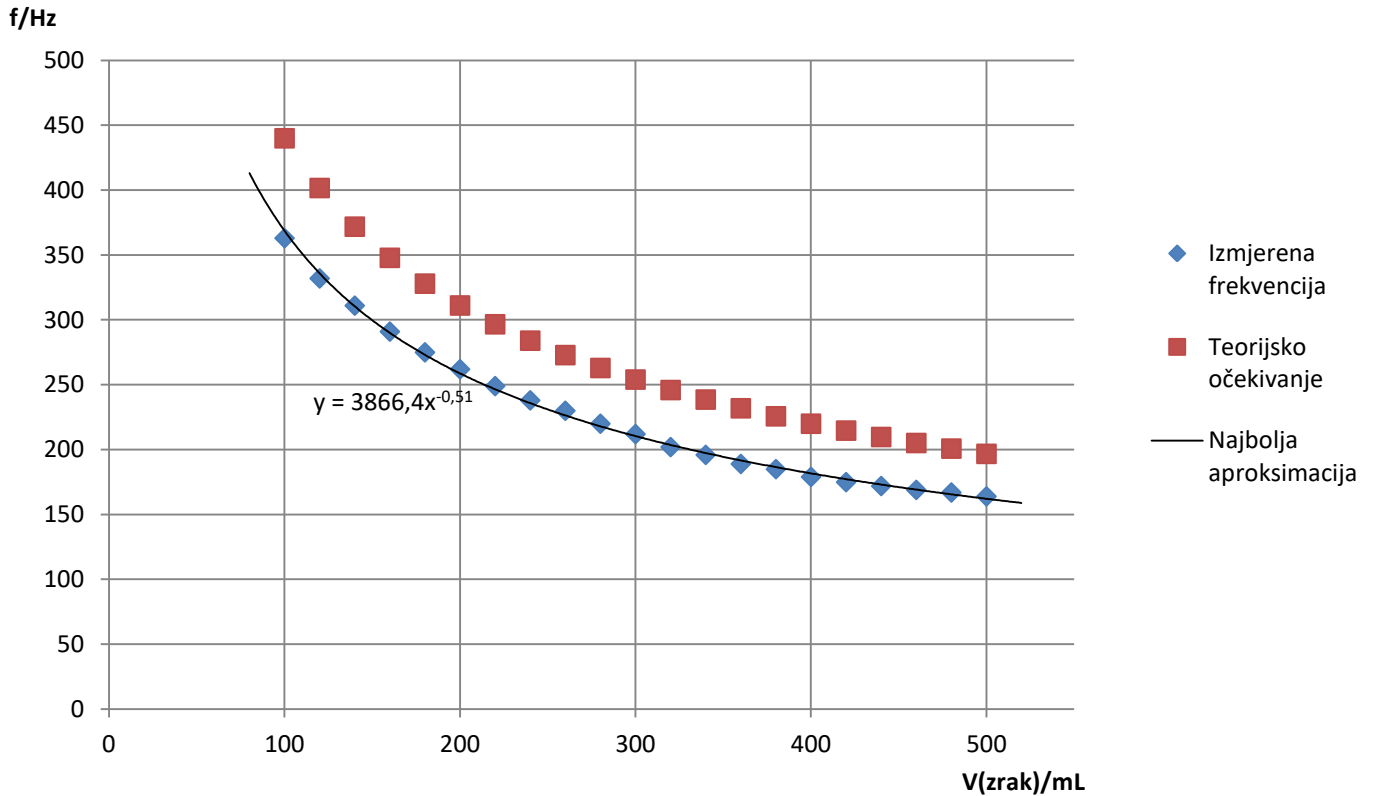
Rezultate mjerenja sam obradio u Excelu i prikazao u grafu 1.



Graf 1: Ovisnost frekvencije o volumenu vode u boci

Vidimo da točke na grafu tvore glatku krivulju, te da niti jedna točka ne odskače puno od drugih, što znači da su mjerenja bila prilično precizna. Prema teorijskoj formuli, frekvencija bi trebala biti proporcionalna recipročnoj vrijednosti drugog korijena iz volumena zraka u boci, što znači

da bi isti odnos trebao vrijediti i za volumen vode u boci, ali sa negativnim koeficijentom proporcionalnosti. Vizualno izgleda da točke dobro leže na takvoj krivulji, ali da bi kvantitativno provjerili koliko se dobro slažu s teorijskim očekivanjima, možemo izračunati volumen zraka u boci tako što od volumena prazne boce oduzmemo volumen vode u njoj. Ovisnost frekvencije o volumenu zraka u boci prikazan je u grafu 2.



Graf 2: Ovisnost frekvencije o volumenu zraka u boci

Kroz točke provučena je krivulja koja najbolje odgovara podatcima, a to je  $f = 3866,4 \cdot V^{-0,51}$ . EkspONENT se jako dobro poklapa sa teorijskom jednađbom koja nalaže da je  $f \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$ , odnosno da je  $f \propto V^{-0,5}$ . Razlikuje se za samo 0,01, odnosno 1,96%.

Duljina grlića boce  $l = 7.3 \text{ cm}$ , a dijаметar grlića na polovici dužine je  $D = 2.6 \text{ cm}$ . Iz toga dobivamo ekvivalentnu duljinu grlića  $l_{eq} = 8.08 \text{ cm}$  i poprečni presjek  $A = 5.31 \text{ cm}^2$ . Ako izračunamo koeficijent proporcionalnosti prema formuli  $\frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A}{l_{eq}}}$ , dobijemo  $k = 4400 \text{ cm}^{3/2}/\text{s}$ . Ovdje je razlika između teorije i eksperimenta puno veća, čak za 13.22%. To je vjerojatno zbog toga što grlić boce nema jednaki promjer cijelom dužinom, nego je stožastog oblika, i teško mu je precizno izmjeriti duljinu jer granica gdje prestaje grlić nije točno određena. Zbog toga je teško odrediti ekvivalentnu duljinu i poprečni presjek grlića.

Ova odstupanja vide se i na grafu. Krivulja na kojoj leže izmjerene točke vrlo je slična onoj na kojoj leže točke dobivene pomoću formule, zbog vrlo sličnog eksponenta, ali znatno su međusobno pomaknute po y osi, zbog velikog odstupanja koeficijenta.

U teorijskom dijelu smo, kako bi pojednostavili formulu i njezin izvod, pretpostavili da je valna duljina zvuka koji proizvodi boca mnogo dulja od boce. Sada, pomoću eksperimentalno dobivenih podataka, možemo provjeriti tu pretpostavku. Valna duljina zvuka kreće se od  $0,945\text{ m}$  do  $2,09\text{ m}$ , a duljina boce je  $25\text{ cm}$ , dakle naša pretpostavka je opravdana.

## 6 Zaključak

Moje hipoteze su se pokazale točnima, frekvencija zvuka se je bila veća ako je količina vode u boci bila veća, i bila je proporcionalna korijenu volumena zraka u boci. Vidimo i da je slaba točka eksperimenta mjerenje dimenzija grlića boce, a ne volumena boce i frekvencija. To sam i očekivao, zato što je grlić nepravilnog oblika i teže je izmjeriti njegove točne dimenzije.

Mislim da bi bilo zanimljivo ponoviti eksperiment sa nekoliko različitih boca, da bi mogli istražiti ovisnost frekvencije titranja o promjeru otvora i duljini grlića boce.

## Literatura

- [1.] <https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/Helmholtz.html>
- [2.] [https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz\\_resonance](https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_resonance)
- [3.] Kulišić: Mehanika i toplina, 1988, Školska knjiga