



## 2. BRILLIANT PATTERN

### Problem

*Suspend a water drop at the lower end of a vertical pipe. Illuminate the drop using a laser pointer and observe the pattern created on a screen. Study and explain the structure of the pattern.*

Zadatak traži da se istraži uzorak koji se dobije na ravnoj plohi koja se nalazi iza kapljice u koju je uperen laser. Kapljica vode visi s kapaljke.

### Pribor

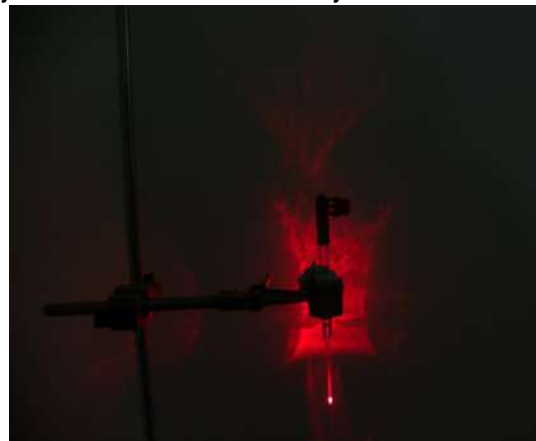


Problem sam po sebi nije zahtijevao pretjerano puno materijala, aparature i pribora.

Bila su potrebna dva stalka, jedan na koji je bila učvršćena kapaljka, a drugi na koji je bio učvršćen laser. Na samom početku pokus sam radila s više različitih kapaljki, jer je oblik i promjer izlazne cijevi kapaljke jako utjecao na oblik kapljice, a on na izgled slike koju sam dobivala. Zato je izbor dobre

kapaljke bio dosta važan. Koristila sam ručni laser promjera snopa svjetlosti 3 mm. Boja je bila crvena, što znači da je valna duljina tih zraka bila oko 700 nm. Crvena svjetlost ima najniži frekvenciju, a najveću valnu duljinu od svih boja vidljivog spektra.

Površina na kojoj sam promatrala uzorak je najčešće bio zid, ali radi boljeg razumijevanja problema koristila sam i savitljive površine poput papira.



### Pojmovi

**Svjetlost** - elektromagnetsko zračenje koje je vidljivo ljudskom oku.

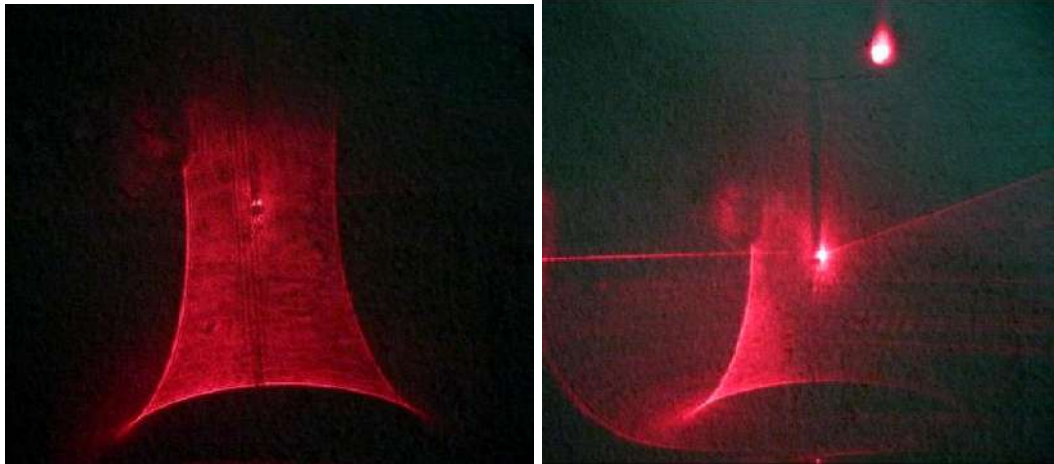
**Laser** - dolazi od engleskog naziva *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. To je ime za optičku napravu koja emitira snop fotona. Laserska je svjetlost, za razliku od svjetlosti koju emitiraju uobičajeni izvori (žarulje), *monokromatična*, odnosno, samo jedne valne duljine i usmjerena je u uskom snopu. Snop je *koherentan*, što znači da su elektromagnetski valovi međusobno u istoj fazi i paralelni su.



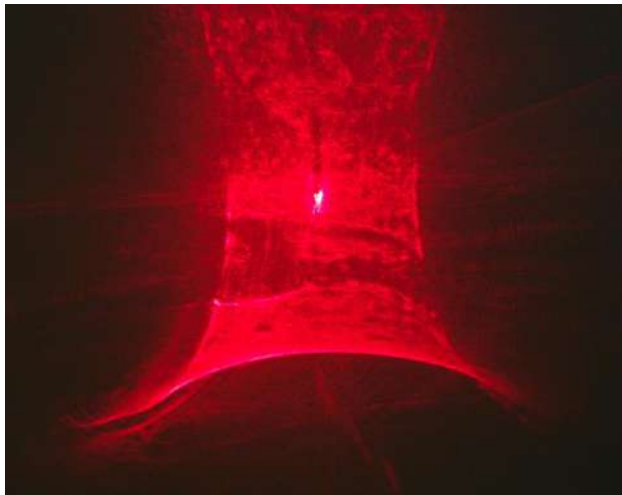
## Dobivene projekcije

Slike koja sam dobivala nisu uvijek bile iste.

Ovdje su prve dvije slike, na kojima sam zaključila da slika jako ovisi o obliku kapljice:

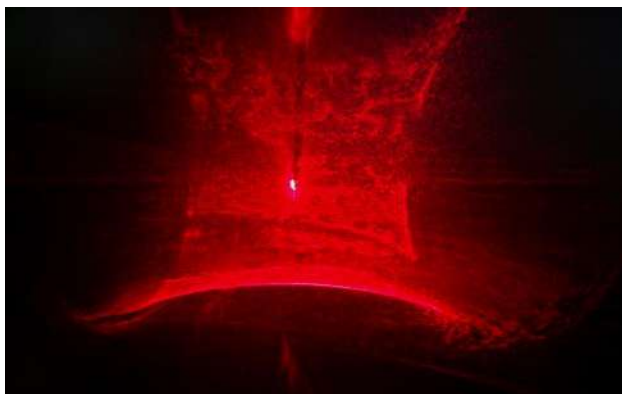


Kasnije sam zaključila da je prva slika sličnija slici koju bi dobili da je kapljica bila savršeno okrugla, a druga sadrži onaj dio koji i razlikuje kapljicu od kugle, a to je onaj uski dio koji ju zapravo drži da ne padne. Vodoravna crta na drugoj slici je zato što je laser bio uperen toliko blizu ruba kapaljke da se dio svjetlosti lomio i na staklu.



Slike koja sam kasnije dobila bile su za mene nevjerovatne. Očekivala sam neki jednostavan uzorak koji će biti lako analizirati. Ono što sam dobila bio je 3D tuljac s proširenjem na donjem rubu.

Prva stvar koju sam pomicanjem lasera zaključila bilo je da se zaobljenost desnog ruba kapljice projicira na lijevu stranu slike na zidu (konveksno desno se pretvara u konkavno lijevo), i obrnuto, tj konveksna zaobljenost lijeve strane kapljice preslika na konkavnu desnu stranu. Analogno sam zaključila da se ono što je gore preslikava dolje. Kasnije ću to i dokazati. Dakle, preslikavanje se događa dijagonalno.



Ako se neke linije na kapljici skupljaju onda se na projekciji šire. Tamo gdje je kapljica najšira u stvarnosti, na projekciji je najuža. Tamo gdje je najuža, a to je na

spoju s kapaljkom, na projekciji je najšira.



Pokušala sam dobiti sliku i u prostoru, ali nisam uspjela. Pokušala sam na dva načina:

- 1) zadimljavanjem prostorije i izvršavanjem pokusa iznad vode koja se isparavala
- 2) ponovnim prolazom svjetlosti kroz vodu u kojoj je otopljeno nešto da bi mogla koristiti Tyndallov efekt

### Razrada problema

Ono što se događa kada laser uperimo u kapljicu je lom (refrakcija) svjetlosti.

Brzina svjetlosti kroz zrakoprazni prostor (vakuum) maksimalna je i iznosi  $c = 300.000 \text{ km/s}$ , dok je ona u svim drugim sredstvima nešto manja ( $v$ ). Taj omjer  $c / v$  je karakteristična optička veličina svake tvari i naziva se indeks loma ( $n$ ) i konstantna je za određenu tvar.

$$n = \frac{c}{v}$$

Međutim u svakom sredstvu osim u vakuumu indeks loma ovisi o valnoj duljini upadne svjetlosti. Što je valna duljina svjetlosti manja to je kut skretanja veći. Dakle najveći je za ljubičastu svjetlost, a najmanji za crvenu. To znači da ljubičasta svjetlost ima najveći, a crvena najmanji indeks loma od svih boja vidljivog spektra.

Kada zraka svjetlosti prelazi iz jednog sredstva u drugo, ukoliko se vrijednosti njihovih indeksa loma razlikuju, odnosno, ako se brzina svjetlosti mijenja, zraka neće nastaviti put po istom pravcu, već se lomi tj. refraktira.

Upadni kut  $i$  i kut loma (izlazni kut zrake) povezani su Snellovim zakonom:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \text{ ili } n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

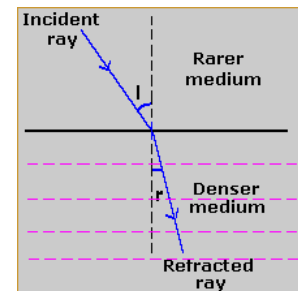
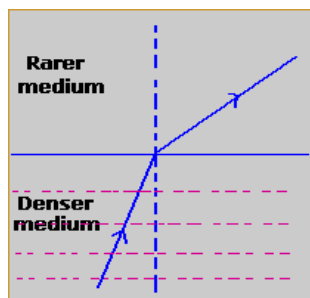
pri čemu su  $v_1$  i  $v_2$  brzine vala,  $n_1$  i  $n_2$  odgovarajući indeksi loma, a  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  ulazni i izlazni kutovi.

Može se reći i da sredstva imaju različitu optičku gustoću. Optički gušće sredstvo je ono koje ima veći apsolutni indeks loma, a ono čiji je indeks loma manji zove se optički rjeđe sredstvo. Ako zrake svjetla upadaju iz optički rjeđeg u optički gušće sredstvo, lomit će se prema okomici, međutim, ako zrake upadaju iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo, lomit će se od okomice (okomica se postavlja na granicu dva sredstva različite optičke gustoće).

U mojem slučaju dolazi do prijelaza svjetlosti iz zraka za koji možemo uzeti da se radi o vakuumu, u vodu, kroz kapljicu, te ponovnom prijelazu iz vode u zrak.

U mojem slučaju dolazi do prijelaza svjetlosti iz zraka za koji možemo uzeti da se radi o vakuumu, u vodu, kroz kapljicu, te ponovnom prijelazu iz vode u zrak.

Za zrak se uzima  $n_1 = 1$ , a za vodu  $n_2 = 4/3$ .





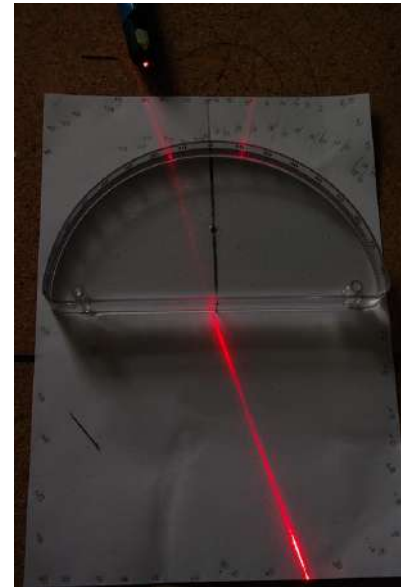
## Mjerenje indeksa loma

Odlučila sam sama izmjeriti indeks loma kada crvenu svjetlost lomim kroz vodu.

U polukružnu nisku posudu stavila sam vodu te kako se vidi na slici pomicala laser i bilježila smjerove. Zatim sam izračunala ulazni i izlazni kut te na temelju njih Snellovim zakonom izračunala relativni kut loma.

Dobila sam prosječnu vrijednost (0.7) koja malo odstupa od one koja je pretpostavljena za vodu, zrak i vidljivu svjetlost ( $\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{4/3} = 0.75$ ). Malo

odstupanje je vjerojatno zbog toga što je drukčiji kut za vidljivu svjetlost, a drugačiji za crvenu, dio je možda i greška u mjerenju, a možda je i utjecaj indeksa loma posude iako je bila vrlo tanka.

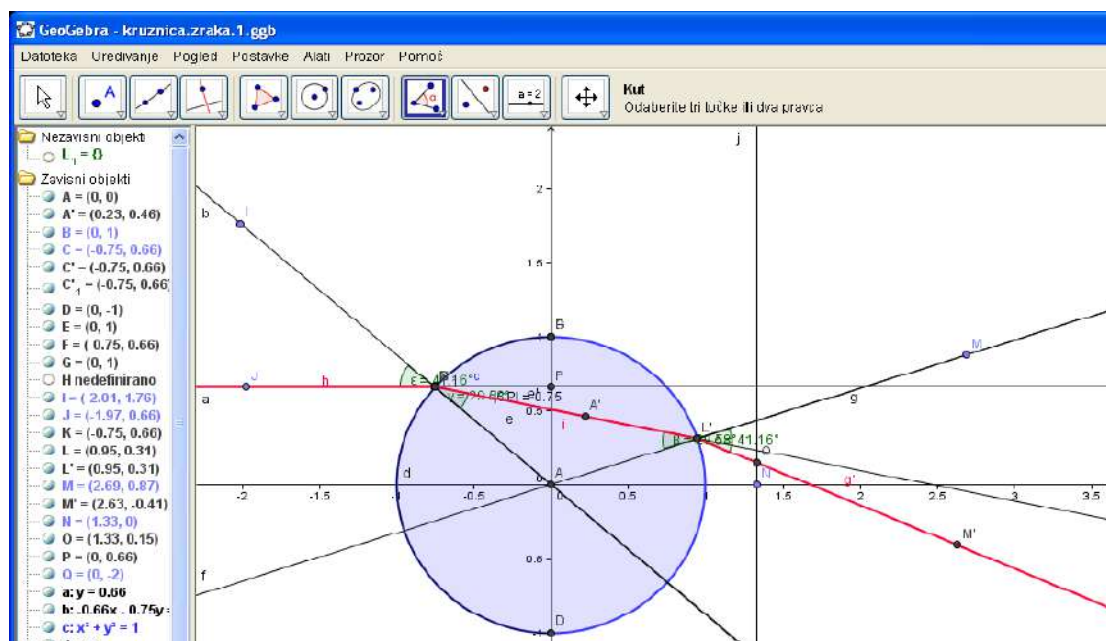


Problem je takav da nije bilo mjerenja, očitavanja, pa čak ni puno formula, tako da pretpostavke koje sam radila nisam mogla u velikom broju slučajeva nikako provjeriti. Ono što sam pokušala je stvoriti iz tih svojih pretpostavki formule po kojima bi iz početnih koordinata točaka na kapljici u koje upadaju laserske zrake izračunala krajnje koordinate ne nekoj ravnini.

## Kugla

Za početak, oblik kapljice je veoma teško opisati, pa sam odlučila započeti s istim problemom, ali da umjesto kapljice riješim problem prvo za njezinu aproksimaciju; kuglu.

Odlučila sam pogledati po presjeku kako se zraka lomi.







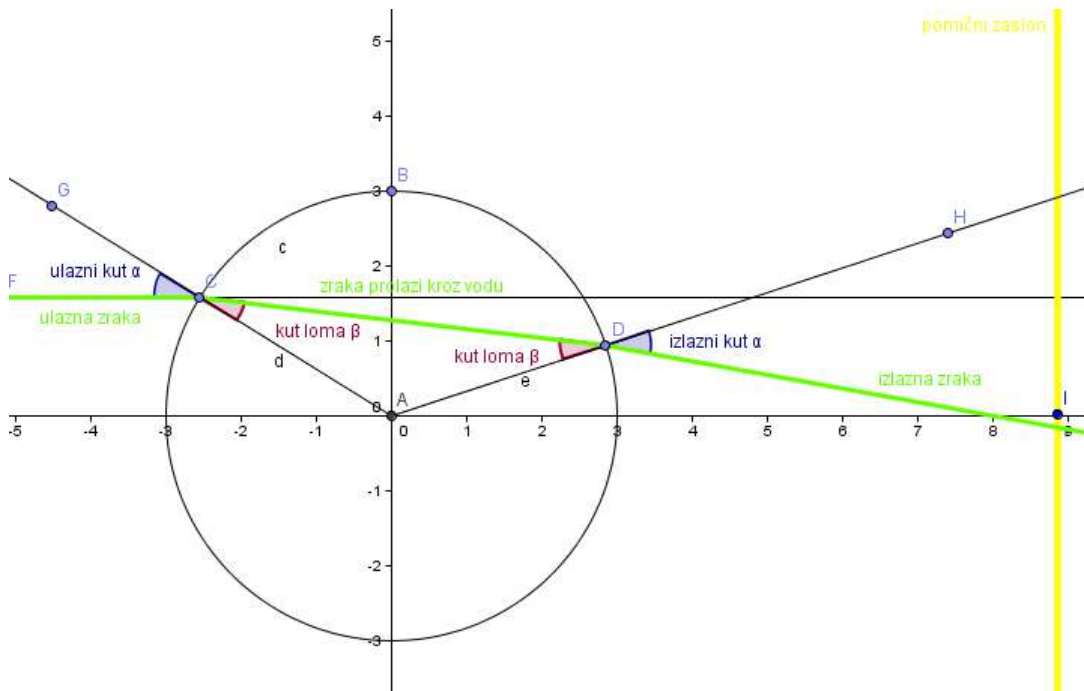
To sam napravila u Geogebi: prvo sam nacrtala kružnicu, te definirala točku koju sam mogla pomicati po jednoj njenoj polovici. Kroz tu točku paralelna linija (na slici označena crvenom bojom) koja je predstavljala jednu zraku lasera sjekla je kuglu. Geogebra je mjerila kut ( $\alpha$ ) te zrake u odnosu na okomicu na kružnicu u toj točki (pravac koji prolazi tom točkom i središtem). To je bio upadni kut, iz koje se Snellovim zakonom izračunao izlazni kut (kut loma= $\beta$ ):

$$n_1 = n \text{ zraka}, n_2 = n \text{ vode}$$

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \text{ iz koje slijedi : } \beta = \sin^{-1}(3 * \sin \alpha / 4)$$

Poznavajući taj kut nacrtala sam zraku koja se pod tim kutom lomi prema okomici. Zatim sam odredila točku u kojoj se zraka sječe s drugom plohom kugle. Na ovom mjestu zraka je ponovno prelazila iz sredstva u sredstvo pa se zraka ponovno lomila. Nije bilo potrebno mjeriti kut koji zatvara zraka i okomica jer je zbog pravila jednakokravnog trokuta on bio jednak  $\beta$ . Analogno, primjenom Snellovog zakona izlazni kut bio je jednak  $\alpha$ . Kako je uvijek  $\alpha > \beta$ , zraka se lomila od okomice.

Tako smo dobili smjer pod kojim se lomila zraka te smo mogli gledati gdje ona sječe neku ravninu koja se nalazi na proizvoljnoj udaljenosti.



Svaka točka na površini kugle ima 3 koordinate x, y, z. Za ishodište sam uzela središte kugle. X i y su koordinate koje su vidljive izvana, dok je z koordinata zapravo udaljenost od središta kugle koja se ne vidi jer je zapravo okomita na smjer iz kojeg gledamo. Na slici se vidi kuda se zraka lomi uzevši u obzir samo x i z koordinatu, ali pošto je kugla simetrična isto se događa (tj. istu formulu se može primijeniti i za x i z koordinatu, ako kuglu zarotiramo za  $45^\circ$  oko osi x). Pri tome y i z koordinata zajedno određuju y koordinatu, a x i z, x koordinatu točke na zaslonu.

Da bi provjerila tu tvrdnju, napravila sam formulu, pomoću koje iz zadanih koordinata (x, y, i z) točke sjecišta zrake i kugle izračunavam koordinate krajnje točke u kojoj zraka sječe zaslon. Pritom sama mogu zadati polumjer kugle (r) i udaljenost zaslona od središta kugle (u).



Formula:

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4} \sin \alpha\right)$$

Nakon računanja kutova, geometrije i trigonometrije dobila sam dvije formule ovisno o tome nalazi li se zaslon iza ili ispred točke u kojoj zraka sječe os x:

1) zaslon je iza sjecišta

$$r_j = u * \operatorname{tg}(2\alpha - 2\beta) - [(\sin(2\beta - \alpha) + \cos(2\beta - \alpha) * \operatorname{tg}(2\alpha - 2\beta))] * r$$

Ako je početna y koordinata bila pozitivna, rješenje je negativno pa ga množimo s -1, a ako je početna bila negativna rješenje je pozitivno.

2) zaslon je ispred sjecišta

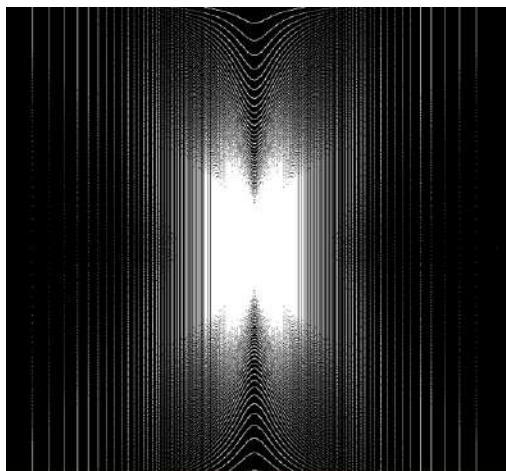
$$r_j = r * [\sin(2\beta - \alpha) + \cos(2\beta - \alpha) * \operatorname{tg}(2\alpha - 2\beta)] - u * \operatorname{tg}(2\alpha - 2\beta)$$

Pritom predznak y koordinate odgovara predznaku krajnjeg rješenja.

Zatim sam u programskom jeziku C++ napisala program koji generira sve točke jedne polovice kugle i za svaku računa gdje zraka koja dođe u nju završi na zaslonu. Na kraju sve te točke i nacrtala.

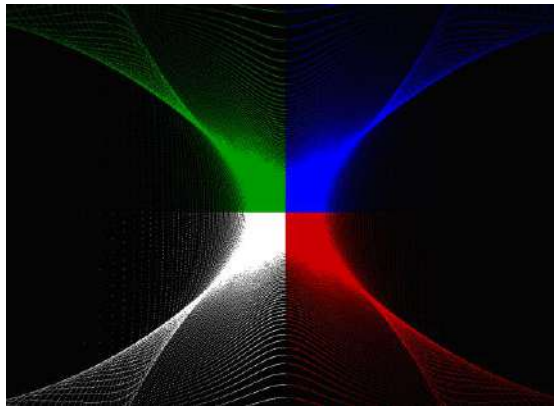
Osim toga napravila sam da je moguće proizvoljno zadati (redom) polumjer kugle, udaljenost zaslona, gustoću točaka te boju. Njih zadajem kao 4 broja pri pozivu programa.

```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
File Not Found
C:\Documents and Settings\Una>w
'w' is not recognized as an internal or external command,
operable program or batch file.
C:\Documents and Settings\Una>W:
W:\>cd user
W:\user>cd una cd FIZIKA
The system cannot find the path specified.
W:\user>cd una FIZIKA
The system cannot find the path specified.
W:\user>cd una
W:\user\una>cd fizika
W:\user\una\FIZIKA>cd ICM-IYPT
W:\user\una\FIZIKA\ICM-IYPT>formula4.exe 3 50 3 3
W:\user\una\FIZIKA\ICM-IYPT>
```



Ono što sam dobila uistinu liči na ono što sam u stvarnosti dobila, s nekim parametrima više, a s nekima manje. (U privitku ima više slika, kôd programa i program.)

Program sam iskoristila da bi što više zaključila o „preslikavanju“. Prvo sam točke koje se nalaze u desnoj gornjoj polovici kugle ( $x > 0$  i  $y > 0$ ) obojila bijelom bojom, točke koje se nalaze u gornjoj lijevoj polovici ( $x < 0$  i  $y > 0$ ) crvenom, točke u donjoj lijevoj ( $x < 0$  i  $y < 0$ ) plavom, a donje desne ( $x > 0$  i  $y < 0$ ) zelenom, i evo što sam dobila:

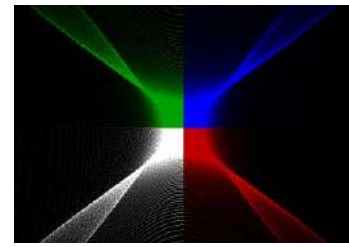
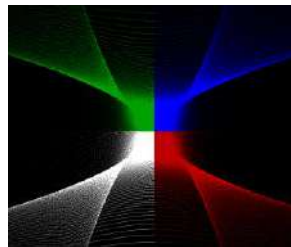
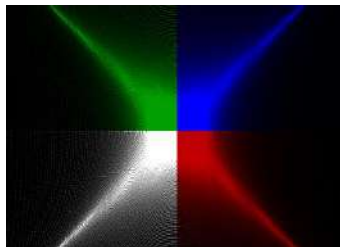


Zaključila sam da se preslikava dijagonalno.

Program sam napravila tako da mogu mijenjati i indeks loma, pa sam mijenjanjem svih tih parametara nekoliko puta zaključila da nešto nije u redu, da sam nešto previdjela, zaboravila uzeti u obzir itd. Zato sam formulu po kojoj se računaju krajnje koordinate nekoliko puta mijenjala (prva slika je dobivena prvom, a druga

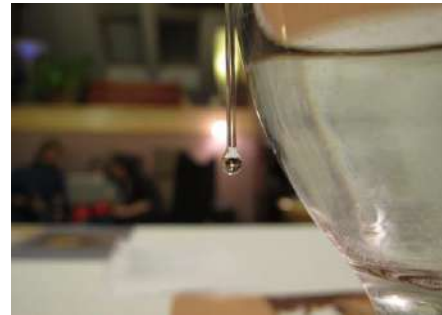
drugom). Mislim da su joj potrebni još neki prepravci, da bi dobila potpuno identičnu sliku onoj na zidu u slučaju kad je kapljica što moguće više zaobljena.

Na slikama vidim različite projekcije, ovisno o parametrima koje sam zadavala (polumjeru kapljice, udaljenosti zaslona, gustoći točaka, indeksu loma...). Namjeravam još bolje razraditi i pronaći pravilnosti u ovisnosti slika o tim parametrima.



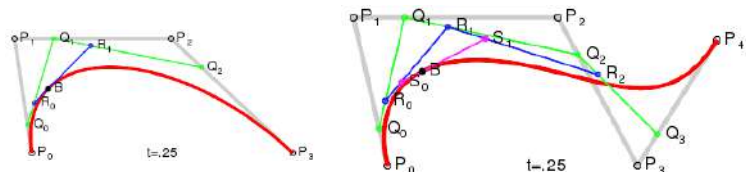
## Kapljica

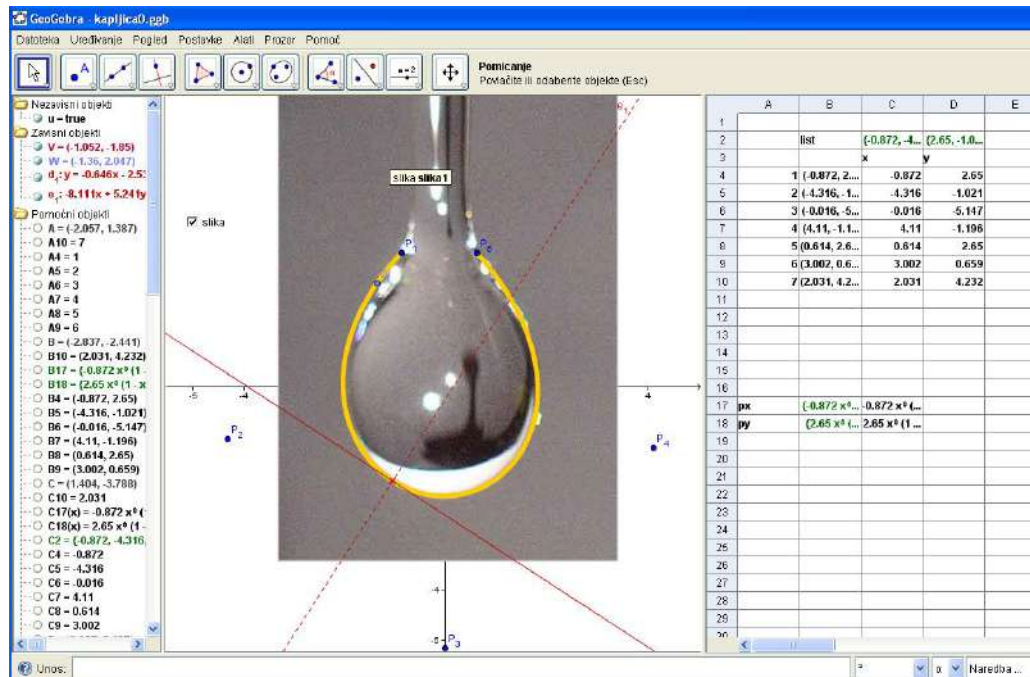
Za kuglu je bilo moguće napraviti formulu jer je simetrična s obzirom na središte; postoji formula kojom se opisuje kružnica i kutove se moglo računati. S kapljicom je stvar totalno drugačija jer ne postoji formula kojom bi matematički opisala oblik kapljice, da bi to poslije mogla koristiti da napišem program koji bi sam generirao sve točke kapljice i pritom mjerio kutove.



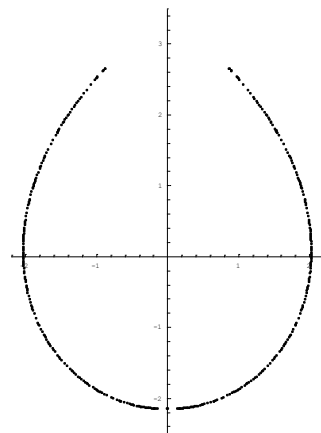
Pokušala sam slikati kapljicu kako bih ju zatim pokušala pomoću Bezierovih krivulja oblikovati u Geogebri.

„**Bézierova krivulja** je parametrična krivulja važna u području matematičke numeričke analize, a osobito se primjenjuje u računalnoj grafici i srodnim djelatnostima. Služi za oblikovanje jasnih i linija i krivulja kojima ne znamo matematičku funkciju, a na ovaj način možemo im vrlo precizno odrediti oblik.





Krivulja je služila kako bi mogla odrediti sve točke te krivulje. Geogebra ih je izmjerila i zabilježila u tablicu. Ono što dalje slijedi je rad u Wolfram Mathematici na izradi programa koji će predvidjeti sliku na zidu za kapljicu. Za sada sam točke koje sam popisala u Geogebri unijela u Mathematicu i dobila konturu kapljice. Slijedi određivanje njene jednadžbe u obliku polinoma. Zatim sličan posao kao i kod kugle, samo što je sve 3D i zato puno teže. Dakle morat ću odrediti jednadžbe rotacijske plohe koju dobijemo rotacijom ove krivulje, napisati jednadžbu upadnih zraka svjetlosti te nalaženje njihovog presjeka s rotacijskom ravninom. Na mjestu presjeka naći jednadžbu okomice na ravninu te kut koji zatvara s upadnom zrakom. Primijeniti Snellov zakon, uzimajući u obzir da upadna zraka, okomica i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Naći jednadžbu lomljene zrake, njezin (drugi) presjek s rotacijskom ravninom, ponoviti postupak određivanja lomljene zrake. Odrediti konačnu izlaznu zraku i gdje presijeca ravninu zastora.



Ostalo još dosta posla, ali i dosadašnji rad zahtijevao je veliku količinu vremena i vrlo raznolika znanja i vještine koja sam stjecala „u hodu“: od mehaničkih problema do programiranja.

Rado bih nastavila rad na ovom problemu.

## Zahvale

Rješavanje ovog problema zahtijevalo je od mene puno više toga nego što sam znala kad sam krenula u rješavanje zadatka, tako da bez pomoći drugih ne bih uspjela napraviti toliko u raspoloživom vremenu. Posebno zahvaljujem Šimi Šuljiću koji me uveo u Geogebra, Predragu Paleu koji mi je pomogao s grafičkim programiranjem, mome mentoru profesoru Miroslavu Josipoviću te Antoniju Štrkalju koji je sa mnom najviše radio na praktičnim problemima mjerenja, fotografiranja i dr.