



**IYPT 2011**

**PROBLEM 14. MOVING CYLINDER**

Una Pale

Tim XVIV

Mentor: Dario Mičić

Istraživački Centar Mladih – ICM



1.	Uvod.....	3
2.	Eksperimentalni dio .....	3
2.1.	Aparatura.....	3
2.2.	Mjerenja .....	4
3.	Teorijski dio .....	5
4.	Rezultati .....	7
4.1.	Ponovljivost mjerenja .....	7
4.2.	Ovisnost akceleracije valjka i akceleracije papira .....	8
4.3.	Utjecaj početnog položaja valjka na akceleraciju .....	8
4.4.	Parametri koji utječu na vrijeme potrebno da valjak padne s papira .....	9
4.5.	Parametri koji utječu na vrijeme potrebno da se valjak zaustavi nakon što padne s papira.....	10
4.6.	Ovisnost deceleracije valjka o faktoru trenja.....	11
5.	Zaključak.....	12
6.	Zahvale.....	12
7.	Literatura.....	13



## Problem

Place a sheet of paper on a horizontal table and put a cylindrical object (e.g. a pencil) on the paper. Pull the paper out. Observe and investigate the motion of the cylinder until it comes to rest.

Zadatak traži da se istraži i objasni gibanje cilindričnog tijela, valjka nakon što se izvuče papir na kojem se nalazi.

## 1. Uvod

Problem zapravo jako podsjeća na slučaj stolnjaka i čaše i nije ga teško niti zamisliti niti izvesti. No teorija koja se nalazi iza njega nije toliko jednostavna.

U zadatku nije zadano izvlači li se papir konstantnom brzinom ili akcelerirano. U slučaju izvlačenja konstantnom brzinom, bez da na početku postoji trzaj, valjak bi ostao stajati na istom mjestu iz sustava papira, a iz vanjskog sustava gibao bi jednolikom brzinom kao i papir, jer ono što mu treba da bi se počeo rotirati i kretati je početna akceleracija. Zato smo odlučili promatrati sustav u kojem se papir izvlači akceleracijom.

Istovremeno, svaka složenija aparatura koju smo isprobali činila je eksperiment nepotrebno složenijim pa smo na kraju koristili čvršći kartonski papir na koji je koncem zavezan uteg.

## 2. Eksperimentalni dio

### 2.1. Aparatura

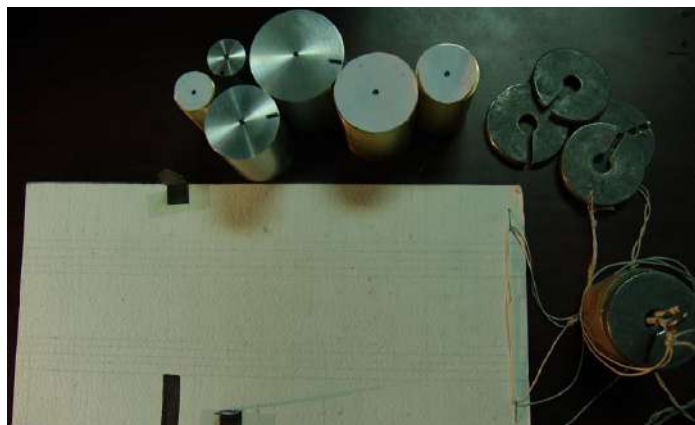
Iako je početna ideja bila povlačenje papira elektromotorom pokretanim naponom iz programiranog generatora, odlučili smo se za jednostavniji način; ubrzanje slobodnim padom. Na papir su koncem učvršćeni utezi. Puštanjem utega papir je dobivao ubrzanje, a time i valjak. Korišteni su utezi različitih masa (200-900g) da bi se postigle različite akceleracije. Osim parametra mase utega, parametar koji smo mijenjali bili su: moment inercije valjka; materijal (aluminij i mesing) i polumjer valjka (20-60mm), koliko je daleko udaljen od ruba papira (10-30cm) te je li pun ili šupalj. A također neophodno je bilo mijenjati i podlogu (stol) na kojoj se sve nalazilo (drvo, aluminijska folija, plastična folija, paus papir, hrapavi papir, staklo, led);, odnosno dinamički koeficijent trenja.



Slika 2: Valjci koji su korišteni u mjerenjima



Slika 1: Podloge korištene u mjerenjima

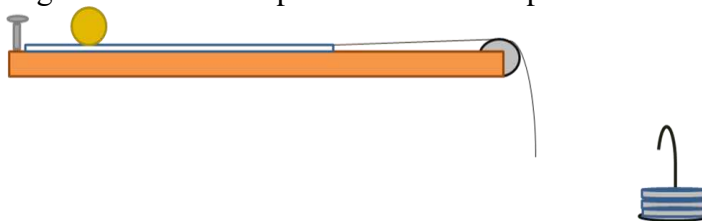


Slika 3: Sva aparatura kojom su izvedena mjerenja

Osim stvari potrebnih za izvođenje mjerenja, korišten je kvalitetan fotoapararat kojim smo bilježili cijeli tok mjerenja kako bismo ga kasnije obradili i dobili podatke.

## 2.2. Mjerenja

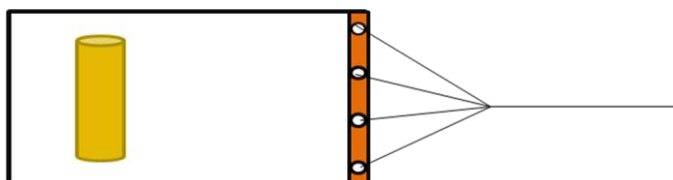
Mjerenja su bila jednostavna, ali su bili potrebni velika preciznost i puno preračunavanja i obrađivanja. Valjak bi se postavio na neku početnu udaljenost od ruba papira  $l_0$  te se na njega objesio uteg određene mase i pustio da slobodno pada.



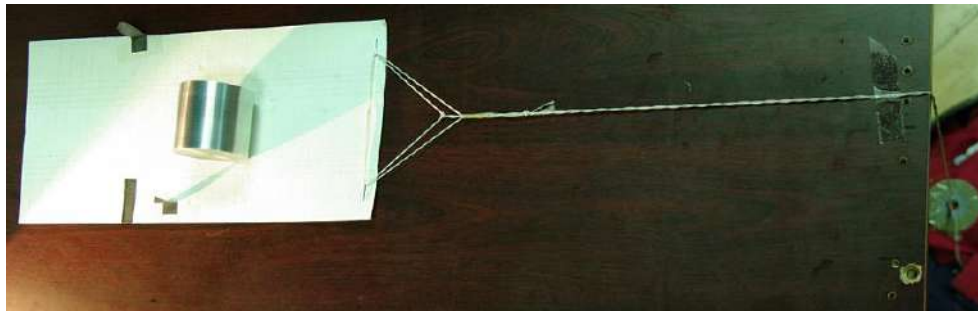
Slika 4: Shema aparature s utegom



Slika 5: Fotografija aparature s utegom prije početka gibanja



Slika 6: Shematski pogled na aparaturu odozgo



Slika 7: Fotografija aparature odozgo

Gibanje se snimalo iz profila profesionalnim fotoaparatom koristeći tzv. „burst mode“; način rada u kojem fotoaparat snima puno fotografija za redom velikom brzinom. U našem slučaju snimala se 21 fotografija u sekundi. Slike su obrađivane u računalnom programu „ImageJ“; određivane su koordinate valjka na svakoj fotografiji te se kasnije mogla izračunati akceleracija koju je imao dok je bio na papiru, deceleracija kada je pao s papira, trenutak u kojem je pao s papira, maksimalna brzina, vrijeme potrebno da se zaustavi itd. Zapravo, moglo se očitati sve što je bio potrebno da bi se teorijska pretpostavka mogla usporediti s mjerenjima.

Parametri koji utječu na gibanje valjka su: masa utega, koeficijent trenja između valjka i podloge, udaljenost na koju je valjak postavljen od ruba papira, te moment tromosti. Moment tromosti određen je masom valjka, polumjerom te je li šupalj ili pun.

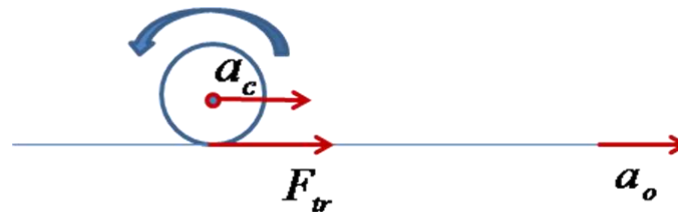
Postavivši teorijsku pretpostavku, postavili smo si ciljeve, tj. mjerenja koja moramo provesti da bismo pokazali poklapanje pretpostavke s mjerenjima:

1. dokazati ponovljivost mjerenja
2. dokazati ovisnost akceleracije valjka  $a_c$  i akceleracije papira  $a_o$
3. dokazati ovisnost vremena potrebnog da padne s papira  $t_1$  o:
  - a. akceleraciji valjka  $a_c$
  - b. udaljenosti valjka od ruba papira  $l_o$
4. dokazati ovisnost vremena potrebnog da se valjak zaustavi nakon što padne s papira o:
  - a. akceleraciji valjka  $a_c$
  - b. udaljenosti valjka od ruba papira  $l_o$
  - c. koeficijentu trenja  $\mu$

### 3. Teorijski dio

Ovaj problem spada u područje dinamike krutog tijela. Ono što se događa s valjkom može se opisati pomoću jednadžbi gibanja za translaciju i rotaciju, te promatrajući događaj i iz sustava papira i iz sustava promatrača.

Situaciju sila i akceleracija promatranu iz sustava promatrača prikazuje Slika 8.



Slika 8: Sile i akceleracije iz sustava promatrača

Papir ima akceleraciju  $a_o$  no prava akceleracija valjka iz sustava promatrača je  $a_c$ . U nekom trenutku odnos brzine papira  $v_p$ , brzine valjka iz sustava promatrača  $v_c$  i brzine valjka iz sustava papira  $v_c'$  je  $v_c = v_p - v_c'$ . Vrijedi  $v_c' = \omega R$  te iz toga slijedi odnos akceleracija:  $a_c = a_o - \alpha R$  iz čega se dobiva  $\alpha = \frac{a_o - a_c}{R}$ . Uzevši u obzir da moment  $M$  možemo izraziti kao  $M = I\alpha$  i  $M = RF_{tr}$  dobivamo jednadžbu gibanja za rotaciju:

$$I\alpha = RF_{tr}$$

Jednadžba gibanja za translaciju je:

$$F_{tr} = ma_c$$

Pritom, sila trenja nije uzrokovana dinamičkim koeficijentom trenja nego statičkim, pa nju ne možemo znati, jer statički koeficijent trenja nije konstantan.

Da bismo pojednostavili račun, moment tromosti valjka  $I$  možemo izraziti kao:

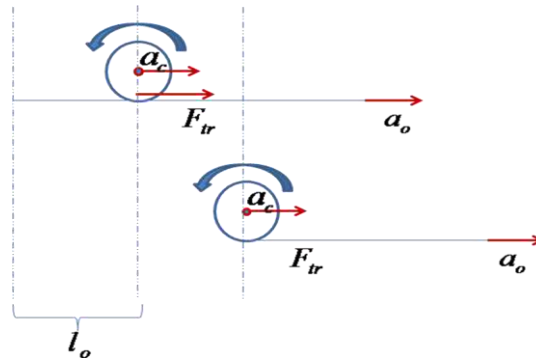
$$I = \gamma mR^2$$

Koristeći jednadžbe za rotaciju i translaciju dobijemo odnos  $a_o$  i  $a_c$ :

$$a_c = \frac{a_o I}{I + mR^2} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} a_o \quad (1)$$

Sustav na početku i u trenutku kada valjak padne s papira prikazuje Slika 9, te iz nje možemo izračunati  $t_1$ ; vrijeme potrebno da valjak padne s papira:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l_o}{a_o - a_c}} = \sqrt{\frac{2l_o(1 + \gamma)}{a_o}} = \sqrt{\frac{2l_o\gamma}{a_c}} \quad (2)$$



Slika 9: Sustav na početku i kad valjak padne s papira

Situacija kada valjak padne s papira prikazuje Slika 10.



Slika 10: Trenutak kad valjak padne s papira

Ponovno možemo napisati jednadžbu gibanja za rotaciju:

$$I\alpha = F_{tr} R$$

te za translaciju:

$$F_{tr} = mg\mu$$

Ovdje je sila trenja posljedica dinamičkog koeficijenta trenja. Iz toga možemo izračunati  $t_2$  odnosno vrijeme potrebno da se zaustavi:

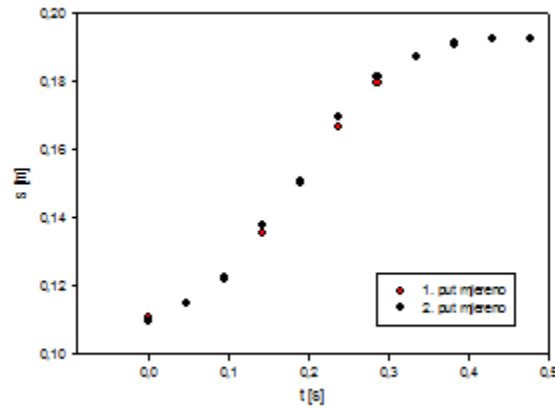
$$t_2 = \frac{\gamma}{\mu g} \sqrt{\frac{2l_o a_o}{1 + \gamma}} = \frac{\sqrt{2l_o a_c \gamma}}{\mu g} \quad (3)$$

Formule 1, 2 i 3 bile su osnova kojom smo uspoređivali teoriju i mjerenja u ovisnosti o različitim parametrima.

## 4. Rezultati

### 4.1. Ponovljivost mjerenja

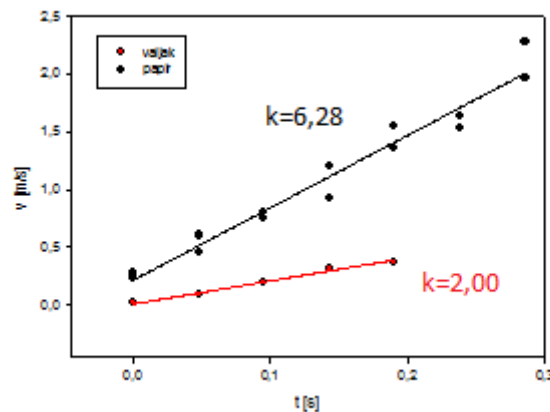
Slika 11 pokazuje da se za dva odvojena mjerenja, ali u istim uvjetima izmjereni podaci i graf ne razlikuju značajno što znači da je pokus ponovljiv i da smo u daljnjim mjerenjima umjesto puno mjerenja u istim uvjetima smjeli napraviti samo jedno ili dva.



Slika 11: Graf dva mjerenja u istim uvjetima

## 4.2. Ovisnost akceleracije valjka i akceleracije papira

Iz formule 1:  $a_c = \frac{\gamma}{\gamma+1} a_o$  lako se može odrediti odnos akceleracije valjka  $a_c$  i akceleracije papira  $a_o$ . Slika 12 pokazuje kako brzina valjka i papira raste u vremenu, a nagibi tih pravaca su akceleracije. Omjer izmjerenih akceleracija je  $\frac{6,28}{2} = 3,14$ , a teorijski omjer je  $\frac{a_o}{a_c} = \frac{\gamma+1}{\gamma} = 3$ . Iz tog razloga smatramo da se teorija i mjerenja dovoljno dobro poklapaju.

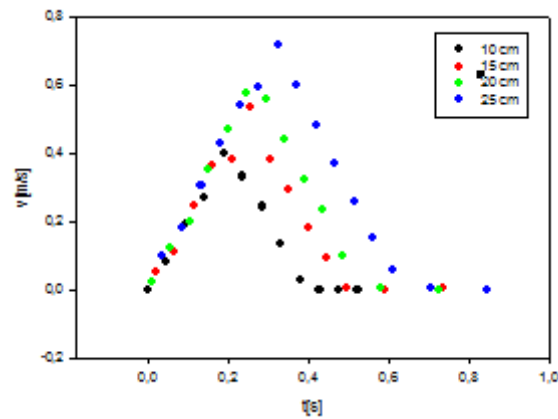


Slika 12: Dva mjerenja s različitim akceleracijama

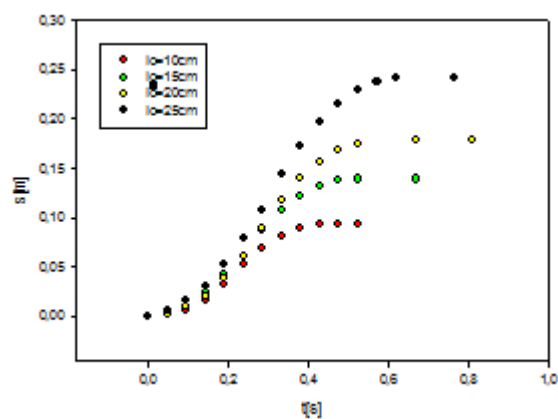
## 4.3. Utjecaj početnog položaja valjka na akceleraciju

Zbog daljnjih mjerenja bilo je potrebno provjeriti, iako teorijom ne ovisi, ovisi li akceleracija valjka  $a_c$  o  $l_o$ . Slika 13 i Slika 14 pokazuju da je akceleracija valjka jednaka, odnosno da je nagib pravaca jednak, te kako put koji valjak prijeđe u određenom trenutku ovisi o  $l_o$ .





Slika 13: Mjerenja akceleracije s različitim početnim udaljenostima valjka



Slika 14: Mjerenja pređenog puta s različitim početnim udaljenostima valjka

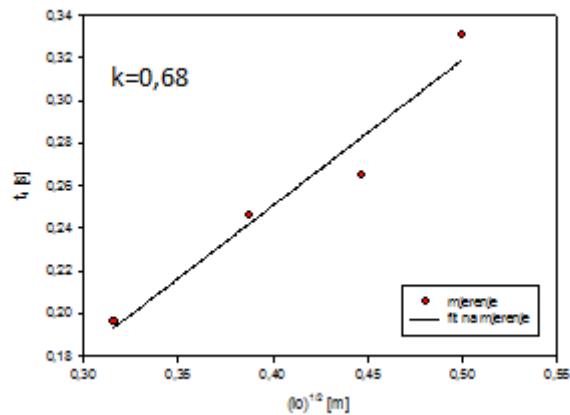
#### 4.4. Parametri koji utječu na vrijeme potrebno da valjak padne s papira

Iz formule 2:  $t_1 = \sqrt{\frac{2l_0\gamma}{a_c}}$  slijedi da  $t_1$  ovisi o  $l_0$ ,  $\gamma$  i  $a_c$ .

Da bismo ustanovili ovisnost o  $l_0$  svi uvjeti su bili isti (isti valjak, isti utezi) samo smo mijenjali  $l_0$  i iz fotografija određivali za svako mjerenje  $t_1$  i  $a_c$ . Slika 15 pokazuje da  $t_1$  ovisi linearno o korijenu od  $l_0$ . Pritom je nagib pravca koeficijent koji također možemo

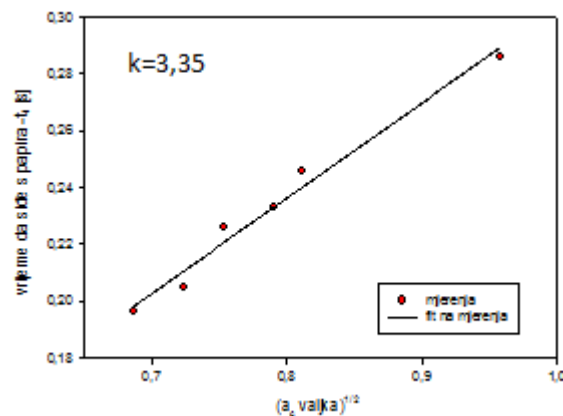
izračunati iz formule 2:  $k = \sqrt{\frac{2\gamma}{a_c}} = 0,67$ . Pritom je  $a_c = 2,22 m/s$ , izmjerena vrijednost

koja je bila ista za sve  $l_0$ , jer akceleracija ne ovisi o  $l_0$ . Možemo primijetiti gotovo savršeno poklapanje.

Slika 15: Mjerenje  $t_1$  za različite  $l_0$ 

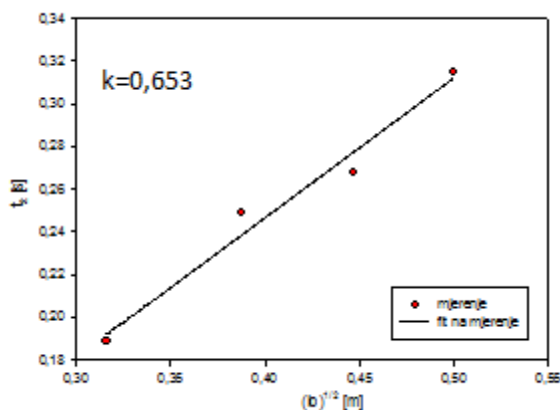
Iako smo namjerali dokazati i ovisnost o  $\gamma$  nismo uspjeli pronaći način da pri mijenjanju  $\gamma$  ne promijenimo  $R$  ili  $m$  valjka, a time i  $a_c$ .

Ovisnost  $t_1$  o  $a_c$  mjerili smo tako da smo svaki puta isti valjak stavili na isti  $l_0$ , a mijenjali masu utega. Iz Slika 16 možemo očitati nagib, odnosno koeficijent kojim  $t_1$  ovisi o korijenu od  $1/a_c$ . Usporedimo li taj podatak s teorijom koja kaže da je  $k = \sqrt{2l_0\gamma} = \sqrt{l_0} = \sqrt{0,1} = 3,16$  postoji mala greška, ali uzevši u obzir da se pri očitavanju položaja radilo o desetinkama mm, smatramo da je greška zbog nesavršenosti mjerenja.

Slika 16: Mjerenje  $t_1$  za različite akceleracije

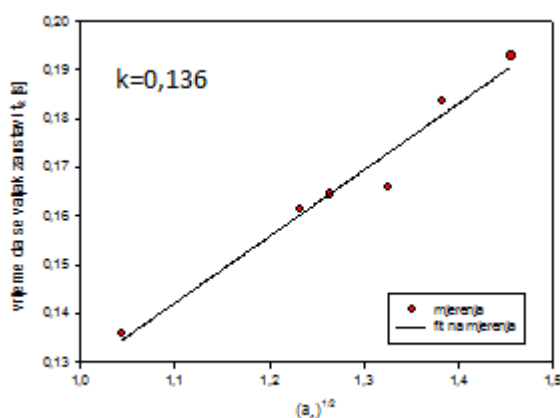
#### 4.5. Parametri koji utječu na vrijeme potrebno da se valjak zaustavi nakon što padne s papira

Iz formule 3:  $t_2 = \frac{\sqrt{2l_0 a_c \gamma}}{\mu g}$  vidimo parametre o kojima ovisi  $t_2$ . Dakle, prvo smo željeli ispitati kako ovisi o početnom položaju  $l_0$ . Slika 17 pokazuje da graf koji smo dobili je pravac, koeficijenta 0,653, dok teorijom dobivamo  $k = \frac{\sqrt{2a_c \gamma}}{\mu g} = \frac{\sqrt{2 * 2,22 * 0,5}}{9,81 * 0,24} = 0,633$  za koeficijent trenja 0,24 što daje dobro podudaranje.

Slika 17: Ovisnost  $t_2$  o  $l_0$ 

Zatim smo ispitali ovisnost o akceleraciji valjka  $a_c$  tako što smo mijenjali masu utega, a ostale parametre držali konstantnima. I iz teorije  $t_2$  ovisi linearno o korijenu iz  $a_c$ :  $t_2 = \frac{\sqrt{2l_0\gamma}}{\mu g} * \sqrt{a_c}$  uz koeficijent  $k = \frac{\sqrt{2l_0\gamma}}{\mu g} = \frac{\sqrt{2 * 0,5 * 0,1}}{9,81 * 0,25} = 0,129$ . Faktor trenja između drvene podloge i aluminijskog valjka bio je 0,24.

Ponovno, teorijski dobiven nagib i eksperimentalni poklapaju se relativno dobro što pokazuje Slika 18.

Slika 18: Mjerenje  $t_2$  za različite  $a_c$ 

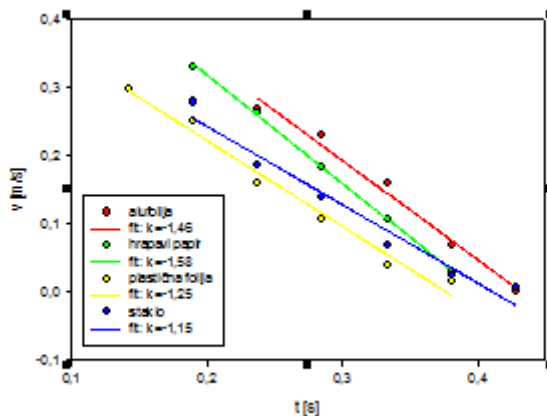
Na kraju smo željeli mijenjati i faktor trenja. Upotrijebili smo različite materijale kao podlogu po kojoj smo vukli papir i na koju je pao valjak nakon što je sišao s papira; drvo, staklo, aluminijsku foliju, plastičnu foliju, hrapavi papir i na kraju smo pokušali s ledom. Ipak, nismo uspjeli osmisliti način na koji bi precizno izmjerili koeficijente trenja za aluminij na navedenim materijalima. Stoga nismo mogli napraviti teoretski izračun nagiba.

#### 4.6. Ovisnost deceleracije valjka o faktoru trenja

Pošto, za sada nismo uspjeli smisliti način da izmjerimo precizno faktor trenja za navedene parove materijala, ali znamo da je deceleracija veća što je koeficijent trenja veći, napravili smo mjerenja. Slika 19 pokazuje deceleracije i zapravo najmanja je za



staklo, što je logično jer ono ima manji koeficijent trenja od plastične ili aluminijske folije ili hrapavog papira. Isto tako i hrapavi papir ima najveću deceleraciju jer ima najveći faktor trenja.



Slika 19: Mjerenje deceleracije na različitim podlogama

## 5. Zaključak

U ovom radu:

- provedeni su eksperimenti u skladu sa zadatkom i napravljena su potrebna mjerenja;
- razvijen je teorijski model koji opisuje gibanje valjka dok je na papiru, te nakon što siđe s papira
- osmišljena su mjerenja tako da se njima provjere pojedine teorijske tvrdnje;
- istraženo je ponašanje valjaka različitih momenta inercije, različite akceleracije, koeficijente trenja s podlogom, te za različit početni položaj valjka na papiru. Na taj način obuhvaćeni su svi parametri koji utječu na efekt; svi parametri koji se nalaze u teoriji;
- napravljeni su potrebni grafički prikazi rezultata.

Potrebno je još osmisliti način preciznog mjerenja koeficijenta trenja, te zatim usporediti dijelove mjerenja i teorije na koje on utječe. I naravno, htjeli bismo promotriti efekt i za olovku navedenu u tekstu zadatka. Ovdje je korišten „idealni“ valjak, jer je i s njim bilo problema da se nije gibao pravocrtno, već je zbog i najmanjih nesavršenosti skretao, pa sae i rotirao. Pored toga, olovka ima bitno manji presjek an kojem je puno teže napraviti precizna mjerenja. U literaturi se navodi da kod olovke može doći i do tzv. „hula hoop“ efekta koji bi trebalo posebno istražiti.

## 6. Zahvale

Zahvaljujem svojim prijateljicama i članicama moga tima; Gabrieli Clari Racz i Katji Kusturi s kojima sam gotovo svakodnevno radila na problemu, te koje su me podržavale i kad sam htjela odustati. Ali veliko hvala i ostalim članovima Istraživačkog Centra Mladih koji su pomagali savjetima i idejama, a osobito hvala Veroniki Sunko koja je spašavala stvari kada ništa nije imalo smisla. Hvala i profesoru Marohniću zbog želje da nam pomogne i svega što je učinio za nas.



## 7. Literatura

- [1] [http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/mechanics/shaw\\_ajp\\_47\\_887\\_79.pdf](http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/mechanics/shaw_ajp_47_887_79.pdf)
- [2] <http://nautilus.fis.uc.pt/personal/mfiolhais/artigosdid/did4.pdf>
- [3] [http://dev.physicslab.org/Document.aspx?doctype=3&filename=RotaryMotion\\_RotationalDynamicsRollingSpheres.xml](http://dev.physicslab.org/Document.aspx?doctype=3&filename=RotaryMotion_RotationalDynamicsRollingSpheres.xml)
- [4] <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/301/lectures/node108.html>
- [5] <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/301/lectures/node115.html>
- [6] T. Cluff, D. G. E. Robertson, and R. Balasubramaniam. Kinetics of hula hooping: An inverse dynamics analysis. *Human Movement Sci.* 27, 4, 622-635 (2008)
- [7] A. O. Belyakov, A. P. Seyranian. The hula-hoop problem. *Doklady Physics* 55, 2, 99-104 (2010)
- [8] Eugene Butikov. Inertial rotation of a rigid body. *Eur. J. Phys.* 27, 913–922 (2006)
- [9] C. Carnero, J. Aguiar, and J. Hierrezuelo. The work of the frictional force in rolling motion. *Phys., Educ.* 28, 225–227 (1993)